ETI 2014/2015
ARITMETICA ORDINALE

VINCENZO MANTOVA

1. Ordinali

Definizione 1.1. (A, E) è un **ordine parziale** se
1. anti-riflessività: $\forall x \in A \neg(xEx)$;
2. anti-simmetria: $\forall x \in A \forall y \in A \neg(xEy \wedge yEx)$;
3. transitività $\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in A(xEy \wedge yEz \to xEz)$.

(A, E) è un **ordine (totale)** se $\forall x \in A \forall y \in A(x = y \vee xEy \vee yEx)$.

Quando si parla di ordini, la relazione E viene solitamente denotata $<$.

Definizione 1.2. Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ ordini totali. Una $f : A \to B$ è **omomorfismo d'ordine** se è (strettamente) crescente: $\forall x \in A \forall y \in A(x <_A y \to f(x) <_B f(y))$. Una omomorfismo d'ordine $f : A \to B$ è un **isomorfismo** se è bigettivo.

Nella definizione non è necessario specificare che anche l'inversa è un omomorfismo d'ordine (vedi Esercizio 1.15).

Definizione 1.3. Un ordine $(A, <)$ è un **buon ordine** se è ben fondato, cioè se ogni sottoinsieme ha un minimo.

Definizione 1.4. Un **ordinale** è una classe di equivalenza di insiemi bene ordinati a meno di isomorfismo d'ordine.

Definizione 1.5. Un **ordinale di von Neumann** è un insieme α tale che:
1. α è transitivo: $\forall x \in \alpha(x \subseteq \alpha)$;
2. tutti gli elementi $x \in \alpha$ sono transitivi: $\forall x \in \alpha \forall y \in x(y \subseteq x)$.

Proposizione 1.6. *Se α è un ordinale di von Neumann, allora $(\alpha, \in)$ è un buon ordine.*

Dimostrazione. Per l'assioma di fondazione, non possiamo avere né $x \in x$, né $x \in y \wedge y \in x$. Quindi $(\alpha, \in)$ è anti-riflessivo e anti-simmetrico. Inoltre, per ogni $x, y, z \in \alpha$, se $x \in y$ e $y \in z$, allora $y \subseteq z$, quindi $x \in z$. Quindi $(\alpha, \in)$ è un ordine. Di nuovo per fondazione, $(\alpha, \in)$ è ben fondato, quindi un buon ordine. □

Notiamo che il collasso di Mostowski di un buon ordine $(A, <)$ è un ordinale di von Neumann (Esercizio 1.19), quindi ordinale è rappresentato da un ordinale di von Neumann. Per semplicità, diremo solamente «ordinali» per parlare di ordinali di von Neumann.

Proposizione 1.7. *Se α è un ordinale e $\beta \in \alpha$, allora β è un ordinale.*

Date: 7 giugno 2015, v0.2.

Dimostrazione. Dato che α è un insieme transitivo abbiamo $\beta \subseteq \alpha$, quindi $(\beta, \in)$ è transitivo. Inoltre, se $y \in \beta$ e $x \in y$, allora $x \in \beta$ per transitività di $(\alpha, \in)$; in particolare, se $y \in \beta$, allora $y \subseteq \beta$. Allora β è un insieme transitivo, quindi un ordinale. □

Definizione 1.8. Dato un ordine totale $(A, <)$, un sottoinsieme $B \subseteq A$ è un **segmento iniziale** se per ogni $x \in B$, $y \in A$, se $y < x$ allora $y \in B$.

Proposizione 1.9. *Dato un ordinale α, un sottoinsieme $B \subseteq \alpha$ è un segmento iniziale se e solo se è un ordinale.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che B è bene ordinato da $\in$ in ogni caso. Allora ci basta osservare che $B \subseteq \alpha$ è un segmento iniziale se e solo se è un insieme transitivo.

Se B è un segmento iniziale, allora se $x \in B$, $y \in \alpha$ e $y \in x$, allora $y \in B$, che implica $x \cap \alpha \subseteq B$. D'altra parte, dato che $x \in \alpha$ abbiamo $x \subseteq \alpha$, quindi $x \cap \alpha = x$, quindi $x \subseteq B$. Segue che B è transitivo.

Vice versa, supponiamo che $B \subseteq \alpha$ sia transitivo. Allora se $x \in B$, $y \in \alpha$ e $y \in x$, abbiamo $y \in B$. Segue che B è un segmento iniziale. □

Corollario 1.10. *Se $\alpha \subsetneq \beta$ sono ordinali, allora $\alpha \in \beta$.*

Dimostrazione. Sia γ il minimo elemento di $\beta \setminus \alpha$, che è un ordinale. Notiamo che $\gamma \subseteq \beta$ perché β è transitivo. Dato che α è un segmento iniziale di β abbiamo

$$\alpha = \{\delta \in \beta \,:\, \delta \in \gamma\} = \gamma,$$

quindi $\alpha = \gamma \in \beta$. □

Proposizione 1.11. *Se α, β sono ordinali distinti, allora o $\alpha \in \beta$ o $\beta \in \alpha$.*

Dimostrazione. Consideriamo la *differenza simmetrica*

$$\alpha \Delta \beta = (\alpha \setminus \beta) \cup (\beta \setminus \alpha) \subseteq \alpha \cup \beta.$$

Per l'ipotesi $\alpha \neq \beta$, $\alpha \Delta \beta \neq \emptyset$. Dato che α e β sono bene ordinati da $\in$, esiste un elemento minimale $\gamma \in \alpha \Delta \beta$, che è un ordinale. A meno di scambiare α e β, possiamo assumere che $\gamma \notin \alpha$ e $\gamma \in \beta$. Notiamo che $\gamma \subseteq \beta$.

Se $\delta \in \gamma$, allora per minimalità di γ dobbiamo avere $\delta \in \alpha$. Segue che $\gamma \subseteq \alpha$. Dato che $\gamma \notin \alpha$, dobbiamo avere $\gamma = \alpha$, quindi $\alpha \in \beta$. □

Segue che la classe di tutti gli ordinali è totalmente ordinata da $\in$.

Definizione 1.12. Chiamiamo **On** la classe di tutti gli ordinali. Indichiamo con $<$ l'ordine indotto da $\in$ sugli ordinali.

Nota 1.13. Abbiamo $\alpha \leq \beta$ (cioè, $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$) se e solo se $\alpha \subseteq \beta$.

Notiamo che **On** è una classe transitiva e che $(\mathbf{On}, \in)$ è un buon ordine; in particolare, **On** non può essere un insieme, perché se lo fosse, sarebbe un ordinale e quindi conterrebbe se stesso, contro l'assioma di fondazione (paradosso di Burali-Forti).

Esercizi

Esercizio 1.14. Dimostrare che se $(A,<)$ è un ordine totale, allora è estensivo, ovvero

$$\mathrm{ext}_<(x) = \{z \in A : z < x\} = \{z \in A : z < y\} = \mathrm{ext}_<(y)$$

se e solo se $x = y$.

Esercizio 1.15. L'inversa di un isomorfismo d'ordine è un omomorfismo d'ordine.

Dato un ordine totale $(A,<)$, un sottoinsieme $B \subseteq A$ si dice **convesso** se per ogni $x, y \in B$, e per ogni $z \in A$, se $x < z < y$ allora $z \in B$.

Esercizio 1.16. Se $(A,<)$ è un buon ordine e $B \subseteq A$ è un segmento iniziale, allora B è convesso.

Esercizio 1.17. Se $(A,<)$ è un buon ordine e $B \subsetneq A$ è un segmento iniziale proprio, allora esiste $x \in A$ tale che $B = \{y \in A : y < x\}$.

Esercizio 1.18. Se $(A,<)$ è un buon ordine e $B \subseteq A$ è un convesso, allora vale una delle seguenti:

(1) esistono $x, y \in A$ tali che $B = [x, y) = \{z \in A : x \leq z < y\}$;
(2) esiste $x \in A$ tale che $B = [x, \infty) = \{z \in A : x \leq z\}$.

Esercizio 1.19. Se $(A, <_A)$ è un insieme bene ordinato, il suo collasso di Mostowski è un ordinale di von Neumann.

2. Successori e limiti

Definizione 2.1. Dato $\alpha \in \mathbf{On}$, il **successore** di α è $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$.

Vedi Esercizio 2.10 per una caratterizzazione in termini di buoni ordini.

Proposizione 2.2. *Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$, $S(\alpha)$ è un ordinale. Inoltre, $S : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ è strettamente crescente.*

Dimostrazione. Notiamo che $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ è

- transitivo: se $x \in S(\alpha)$ abbiamo o $x \in \alpha$, che implica $x \subseteq \alpha \subseteq S(\alpha)$, o $x = \alpha$, che implica di nuovo $x \subseteq S(\alpha)$;
- ogni $x \in S(\alpha)$ è transitivo, perché o $x \in \alpha$ o $x = \alpha$.

Quindi $S(\alpha)$ è un ordinale.

Inoltre S è strettamente crescente: se $\alpha < \beta$, allora $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$; abbiamo o $S(\alpha) \subsetneq \beta$, quindi $S(\alpha) \in \beta \subseteq S(\beta)$, o $S(\alpha) = \beta$, quindi $S(\alpha) \in \beta \cup \{\beta\} = S(\beta)$; in entrambi i casi, $S(\alpha) \in S(\beta)$. □

Proposizione 2.3. *Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$, $S(\alpha)$ è il minimo ordinale maggiore di α.*

Dimostrazione. Sia β un qualsiasi ordinale maggiore di α. Allora $\alpha \subseteq \beta$ e $\alpha \in \beta$, quindi $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$, ovvero $S(\alpha) \leq \beta$. D'altra parte, $\alpha < S(\alpha)$. □

Definizione 2.4. Chiamiamo 0 l'ordinale $\emptyset$, 1 l'ordinale $S(\emptyset)$, 2 l'ordinale $S(1)$, e così via per tutti i numeri naturali.

Definizione 2.5. Dato un'insieme $A \subseteq \mathbf{On}$ di ordinali, definiamo $\sup(A) := \bigcup A = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$.

Proposizione 2.6. *Per ogni insieme $A \subseteq \mathbf{On}$ di ordinali, $\sup(A)$ è un ordinale.*

Dimostrazione. Se $x \in \sup(A)$, allora $x \in \alpha$ per qualche $\alpha \in A$, quindi $x \subseteq \alpha \subseteq \sup(A)$, da cui segue che $\sup(A)$ è transitivo. Inoltre, ogni $x \in \sup(A)$, $x \in \alpha$ per qualche $\alpha \in A$, quindi x è transitivo. Allora $\sup(A)$ è un ordinale. □

Proposizione 2.7. *Per ogni insieme $A \subseteq \mathbf{On}$ di ordinali, e per ogni $\alpha \in A$, $\alpha \leq \sup(A)$.*

Inoltre, se A ha un massimo α, allora $\alpha = \sup(A)$.

Dimostrazione. Per definizione, per ogni $\alpha \in A$, $\alpha \subseteq \sup(A)$, che significa $\alpha \leq \sup(A)$.

Se A ha un massimo α, allora $\sup(A) = \bigcup_{\beta \in A} \beta \subseteq \alpha \subseteq \sup(A)$, quindi $\alpha = \sup(A)$. □

Definizione 2.8. Un ordinale $\alpha \in \mathbf{On}$ si dice **successore** se $\alpha = S(\beta)$ per qualche $\beta \in \mathbf{On}$.

Un ordinale si dice **limite** se $\alpha = \sup(\alpha)$.

Proposizione 2.9. *Ogni ordinale è o limite o successore, ma non entrambi.*

Dimostrazione. Sia α. Sia $\beta = \sup(\alpha)$. Osserviamo innanzitutto che $\beta = \bigcup_{\gamma \in \alpha} \gamma \subseteq \alpha$ perché α è transitivo.

Supponiamo che α non sia limite. Allora $\beta \in \alpha$. Notiamo allora che $\beta \subseteq \alpha$, quindi $S(\beta) = \beta \cup \{\beta\} \subseteq \alpha$. Dato che $S(\beta) \nsubseteq \beta = \sup(\alpha)$, segue che $S(\beta) \notin \alpha$. Quindi $\alpha = S(\beta)$, ovvero α è successore.

Vice versa, se $\alpha = S(\beta)$ per qualche β, allora $\gamma \in \alpha$ implica $\gamma \subseteq \beta$, da cui segue che $\sup(\alpha) \subseteq \beta$, quindi $\sup(\alpha) \neq \alpha$. □

In particolare, 0 è un ordinale limite.

Esercizio 2.10. Sia $(A, <_A)$ è un insieme bene ordinato. Sia $B := A \cup \{x\}$ per qualche $x \notin A$, e definiamo $<_B$ su B come:

(1) per ogni $y \in A$, $y <_B x$;
(2) per ogni $y, z \in A$, $y <_B z$ se e solo se $y <_A z$.

Verificare che se $(A, <_A)$ è isomorfo a $(\alpha, \in)$, allora $(B, <_B)$ è isomorfo a $(S(\alpha), \in)$.

Esercizio 2.11. Sia $(A, <_A)$ è un insieme bene ordinato. Sia $\{B_i : i \in I\}$ un insieme di segmenti iniziali tali che $\bigcup_{i \in I} B_i = A$.

Verificare che se $(A, <_A)$ è isomorfo a $(\alpha, \in)$, e per ogni $i \in I$, $(B_i, <_{A_i})$ è isomorfo ad $(\beta_i, \in)$, allora $\alpha = \sup\{\beta_i : i \in I\}$.

Esercizio 2.12. α è un ordinale limite se e solo se $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}$.

Esercizio 2.13. Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$, $\alpha = \sup\{S(\beta) : \beta < \alpha\}$.

3. Funzioni continue

Definizione 3.1. Una funzione $f : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ è **continua** se dato un insieme $A \subseteq \mathbf{On}$, $f(\sup(A)) = \sup(f(A))$.

Proposizione 3.2. *Se $f : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ è crescente, allora è continua se e solo se $f(\alpha) = \sup_{\beta < \alpha} f(\beta)$ per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$ limite.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathbf{On}$ e sia $\alpha = \sup(A)$.

Se $\alpha \in A$, quindi se α è il massimo di A, allora $f(\beta) \leq f(\alpha)$ per ogni $\beta \in A$, quindi $\sup(f(A)) \leq f(\alpha) \leq \sup(f(A))$. Quindi $f(\sup(A)) = \sup(f(A))$ in ogni caso.

Se invece $\alpha \notin A$, allora α è un ordinale limite. Dato che f è crescente, abbiamo $\sup(f(A)) \leq \sup_{\beta<\alpha}(f(\beta))$. D'altra parte, dato che $\alpha = \sup(A)$, per ogni $\beta < \alpha$ esiste $\gamma \in A$ tale che $\beta < \gamma$. Ne segue che $\sup_{\beta<\alpha}(f(\beta)) \leq \sup(f(A))$. Allora $\sup(f(A)) = \sup_{\beta<\alpha}(f(\beta))$.

Quindi, $f(\sup(A)) = \sup(f(A))$ per ogni $A \subseteq \mathbf{On}$ se e solo se $f(\alpha) = \sup_{\beta<\alpha}(\alpha)$ per ogni α ordinale limite. □

Definizione 3.3. Una funzione $f : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ è **normale** se è crescente, continua e

Proposizione 3.4. *Una funzione* $f : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ *normale ammette punti fissi arbitrariamente grandi.*

Dimostrazione. Sia α un qualsiasi ordinale. Abbiamo $f(\alpha) \geq \alpha$ (vedi Esercizio 3.5). Sia $\beta := \sup_{n<\omega} f^{(n)}(\alpha)$, dove $f^{(n)} = f \circ \cdots \circ f$ è la composizione di f con se stessa n volte. Allora $f(\beta) = f(\sup_{n<\omega} f^{(n)}(\alpha)) = \sup_{n<\omega} f(f^{(n)}(\alpha)) = \sup_{n<\omega} f^{(n+1)}(\alpha) = \beta$, ovvero β è un punto fisso. Inoltre, $\beta \geq \alpha$. □

Esercizi

Esercizio 3.5. Una $f : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ crescente soddisfa $f(\alpha) \geq \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$.

Esercizio 3.6. Se $(A, <_A)$ è un buon ordine, e $f : A \to A$ è una funzione crescente allora $f(x) \geq x$ per ogni $x \in A$.

Esercizio 3.7 (*)**.** Una $f : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ è continua se e solo se è continua secondo la topologia dell'ordine (cioè, la topologia con base di aperti della forma $(\alpha, \beta) = \{\gamma \in \mathbf{On} : \alpha < \gamma < \beta\}$).

4. Aritmetica

Definizione 4.1. Definiamo la somma per induzione. Fissiamo $\alpha \in \mathbf{On}$. Definiamo:

(1) $\alpha + 0 := \alpha$;
(2) per $S(\beta) \in \mathbf{On}$ successore, $\alpha + S(\beta) := S(\alpha + \beta)$;
(3) per $\beta \in \mathbf{On}$ limite e $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta := \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \alpha\}$.

Osservazione 4.2. Sugli ordinali finiti 0, 1, 2 ... la definizione di somma coincide con la definizione di Peano sui naturali. Quindi la somma ordinale ristretta agli ordinali finiti è la somma tra numeri naturali.

Proposizione 4.3. *Per ogni* $\alpha \in \mathbf{On}$*, la funzione* $\beta \mapsto \alpha + \beta$ *è strettamente crescente.*

Dimostrazione. Siano $\beta < \gamma$ due ordinali. Dimostriamo che $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ per induzione su γ.

Il passo base è $\gamma = S(\beta)$. In questo caso, $\alpha + \beta < S(\alpha + \beta) = \alpha + S(\beta) = \alpha + \gamma$.

Se $\gamma = S(\delta)$ per qualche $\delta \ni \beta$, allora $\alpha+\beta \in \alpha+\delta \in S(\alpha+\delta) = \alpha+S(\delta) = \alpha+\gamma$, quindi $\alpha + \beta \in \alpha + \gamma$ per transitività.

Se $\gamma = \sup(\gamma)$, allora $S(\beta) \in \gamma$, quindi $\alpha+\beta \in \alpha+S(\beta) \subseteq \sup_{\delta\in\gamma}(\alpha+\delta) = \alpha+\gamma$, quindi $\alpha + \beta \in \alpha + \gamma$. □

Corollario 4.4. *Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$, la funzione $\beta \mapsto \alpha + \beta$ è continua.*

Proposizione 4.5. *Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.*

Dimostrazione. Fissiamo α e β e lavoriamo per induzione su γ.

Se $\gamma = 0$, la conclusione è banale.

Se $\gamma = S(\delta)$, allora $(\alpha + \beta) + S(\gamma) = S((\alpha + \beta) + \gamma) = S(\alpha + (\beta + \gamma)) = \alpha + S(\beta + \gamma) = \alpha + (\beta + S(\gamma))$.

Se $\gamma = \sup(\gamma)$, allora $(\alpha+\beta)+\gamma = \sup_{\delta\in\gamma}((\alpha+\beta)+\delta) = \sup_{\delta\in\gamma}(\alpha+(\beta+\delta)) = \alpha + (\beta + \gamma)$ (nell'ultimo passaggio abbiamo usato la continuità). □

Definizione 4.6. Definiamo il prodotto per induzione. Fissiamo $\alpha \in \mathbf{On}$. Definiamo:

(1) $\alpha \cdot 0 := 0$;
(2) per $S(\beta) \in \mathbf{On}$ successore, $\alpha \cdot S(\beta) := \alpha \cdot \beta + \alpha$;
(3) per $\beta \in \mathbf{On}$ limite e $\beta \neq 0$, $\alpha \cdot \beta := \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \alpha\}$.

Osservazione 4.7. Come per la somma, il prodotto sugli ordinali finiti 0, 1, 2 ... è il prodotto tra numeri naturali.

Proposizione 4.8. *Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$, la funzione $\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ è strettamente crescente.*

Dimostrazione. Usando lo stesso ragionamento per la somma (Esercizio 4.29). □

Corollario 4.9. *Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$, la funzione $\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ è continua.*

Proposizione 4.10. *Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.*

Dimostrazione. Usando lo stesso ragionamento per la somma (Esercizio 4.32). □

Proposizione 4.11. *Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$ abbiamo $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.*

Dimostrazione. Fissiamo α e β e lavoriamo per induzione su γ.

Se $\gamma = 0$, $\alpha \cdot (\gamma + 0) = \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot 0$.

Se $\gamma = S(\delta)$, allora $\alpha\cdot(\beta+S(\gamma)) = \alpha\cdot S(\beta+\gamma) = \alpha\cdot(\beta+\gamma)+\alpha = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma+\alpha = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot S(\gamma)$.

Se $\gamma = \sup(\gamma)$, allora $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \sup_{\delta\in\gamma}(\alpha \cdot (\beta + \delta)) = \sup_{\delta\in\gamma}(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. □

Definizione 4.12. Definiamo l'esponenziale per induzione. Fissiamo $\alpha \in \mathbf{On}$. Definiamo:

(1) $\alpha^0 := 1$;
(2) per $S(\beta) \in \mathbf{On}$ successore, $\alpha^{S(\beta)} := \alpha^\beta \cdot \beta$;
(3) per $\beta \in \mathbf{On}$ limite e $\beta \neq 0$, $\alpha^\beta := \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \alpha\}$.

Proposizione 4.13. *Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$ maggiore di 1, la funzione $\beta \mapsto \alpha^\beta$ è strettamente crescente.*

Dimostrazione. Usando lo stesso ragionamento per la somma (Esercizio 4.36). □

Corollario 4.14. *Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$ maggiore di 0, la funzione $\beta \mapsto \alpha^\beta$ è continua.*

Nota 4.15. Il minimo punto fisso di $\beta \mapsto \omega^\beta$ viene indicato con ε_0.

Proposizione 4.16. *Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$ con $\alpha \neq 0$, $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.*

Dimostrazione. Usando lo stesso ragionamento per la distributività del prodotto sulla somma (Esercizio 4.38). $\square$

Proposizione 4.17 (Sottrazione)**.** *Per ogni $\alpha \geq \beta$ ordinali, esiste un unico $\gamma \in \mathbf{On}$ tale che $\beta + \gamma = \alpha$.*

Dimostrazione. Sia A l'insieme degli ordinali δ tali che $\beta + \delta < \alpha$. Sia $\gamma = \sup(A)$. Allora $\beta + \gamma \leq \alpha$ per continuità. Se $\beta + \gamma = \alpha$, abbiamo concluso.

Se invece $\beta + \gamma < \alpha$, allora $\gamma \in A$, quindi γ è il massimo di A, che implica $S(\gamma) \notin A$, quindi $\beta + S(\gamma) \geq \alpha$. D'altra parte, $\beta + S(\gamma) \leq \alpha$, quindi $\beta + S(\gamma) = \alpha$. $\square$

Proposizione 4.18 (Divisione)**.** *Per ogni $\alpha \geq \beta$ ordinali, esistono unici $\gamma, \delta \in \mathbf{On}$ tali che $\beta \cdot \gamma + \delta = \alpha$ e $\delta < \gamma$.*

Dimostrazione. Usando lo stesso ragionamento per la sottrazione (Esercizio 4.41). $\square$

Proposizione 4.19. *Per ogni $\alpha \geq \beta$ ordinali, esistono unici $\gamma, \delta, \eta \in \mathbf{On}$ tali che $\beta^\gamma \cdot \eta + \delta = \alpha$, con $\eta < \beta$ e $\delta < \beta^\gamma$.*

Dimostrazione. Usando lo stesso ragionamento per la divisione (Esercizio 4.42). $\square$

Proposizione 4.20 (Forma Normale di Cantor)**.** *Ogni ordinale α si può scrivere in modo unico come*

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

dove $k_1, \ldots, k_n$ sono numeri naturali non nulli e $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ sono ordinali.

Dimostrazione. Dato α, utilizzando il logaritmo troviamo β_1, k_1 e α_1 tali che $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \alpha_1$ con $k_1 < \omega$ e $\alpha_1 < \omega^{\beta_1}$. Ripetiamo la procedura con α_1 per definire β_2, k_2 e α_2, e proseguiamo induttivamente finché non troviamo $\alpha_{n+1} = 0$. La successione $\beta_1 > \beta_2 > \ldots$ è strettamente decrescente; siccome gli ordinali sono bene ordinati, la successione deve raggiungere un minimo, quindi dopo un numero finito di passi troviamo davvero un $\alpha_{n+1} = 0$.

Per l'unicità, basta osservare che $\omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n < \omega^{\beta_1}$ (con applicazioni ripetute di Esercizio 4.43). $\square$

Proposizione 4.21. *Sia α un ordinale diverso da 0. Allora:*

1. *se $0 < k < \omega$ allora $k \cdot \omega^\alpha = \omega^\alpha$;*
2. *se $\beta < \alpha$ allora $\omega^\beta + \omega^\alpha = \omega^\alpha$.*

Dimostrazione. (1) Ragioniamo per induzione su α.

Se $\alpha = 1$, allora $k \cdot \omega^\alpha = k \cdot \omega = k \cdot \sup(\omega) = \sup_{n<\omega}(k \cdot n) = \omega$.

Se $\alpha = S(\beta)$ per qualche $\emptyset < \beta < \alpha$, allora $k \cdot \omega^\alpha = k \cdot \omega^{S(\beta)} = k \cdot \omega^\beta \cdot \omega = \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{S(\beta)} = \omega^\alpha$.

Se $\alpha = \sup(\alpha)$, allora $k \cdot \omega^\alpha = k \cdot \sup_{\beta<\alpha}(\omega^\beta) = \sup_{\beta<\alpha}(k \cdot \omega^\beta) = \sup_{\beta<\alpha}(\omega^\beta) = \omega^\alpha$.

(2) Studiamo prima il caso $\beta = 0$, quando $\omega^\beta = \omega^0 = 1$, per induzione su α.

Se $\alpha = 1$, allora $1 + \omega^\alpha = 1 + \omega = \sup_{n<\omega}(1 + n) = \omega$.

Se $\alpha = S(\gamma)$ per qualche $1 \leq \gamma < \alpha$, allora

$$\begin{aligned} 1 + \omega^\alpha &= 1 + \omega^{S(\gamma)} = 1 + \omega^\gamma \cdot \omega = \sup_{n<\omega}(1 + \omega^\gamma \cdot n) = \sup_{n<\omega}(1 + \underbrace{\omega^\gamma + \cdots + \omega^\gamma}_{n \text{ volte}}) = \\ &= \sup_{n<\omega}(\underbrace{\omega^\gamma + \cdots + \omega^\gamma}_{n \text{ volte}}) = \sup_{n<\omega}(\omega^\gamma \cdot n) = \omega^\gamma \cdot \omega = \omega^{S(\gamma)} = \omega^\alpha. \end{aligned}$$

Per il caso generale, dato che $\beta < \alpha$, possiamo scrivere (per sottrazione) $\alpha = \beta + \delta$ con $\delta > 0$. Allora $\omega^\beta + \omega^\alpha = \omega^\beta + \omega^{\beta+\delta} = \omega^\beta \cdot (1 + \omega^\delta) = \omega^\beta \cdot \omega^\delta = \omega^{\beta+\delta} = \omega^\alpha$. □

Proposizione 4.22. *Siano $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ e $\gamma = \omega^{\delta_1} \cdot j_1 + \cdots + \omega^{\delta_m} j_m$ in forma normale. Sia p il massimo intero tale che $\beta_p \geq \delta_1$, con $p = 0$ se non esiste (ovvero se $\beta_1 < \delta_1$). Allora*

$$\alpha + \gamma = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_p} \cdot k_p + \omega^{\delta_1} \cdot j_1 + \cdots + \omega^{\delta_m} \cdot j_m.$$

La somma $\alpha + \gamma$ qui sopra è già in forma normale di Cantor, tranne quando $\beta_p = \delta_1$, nel qual caso basta rimpiazzare $\omega^{\beta_p} \cdot k_p + \omega^{\delta_1} \cdot j_1$ con $\omega^{\beta_p} \cdot (k_p + j_1)$.

Dimostrazione. Basta applicare ripetutamente la 4.21. □

Proposizione 4.23. *Sia $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ in forma normale di Cantor e γ un ordinale.*

(1) *Se γ è limite, allora $\alpha \cdot \gamma = \omega^{\beta_1} \cdot \gamma$.*
(2) *Se γ è successore, allora $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot \gamma + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$.*

Con applicazioni ripetute di questa regola, è possibile calcolare il prodotto di ordinali in forma normale di Cantor.

Dimostrazione. Lavoriamo per induzione su γ.

Se $\gamma = 0$, la conclusione è banale: $\alpha \cdot 0 = 0 = \omega^{\beta_1} \cdot 0$.

Se $\gamma = S(\delta)$ per qualche δ:

- se δ è successore,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \gamma &= \alpha \cdot \delta + \alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot \delta + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n + \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \\ &= \omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot \delta + \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot \gamma + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n; \end{aligned}$$

- se δ è limite,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \gamma &= \alpha \cdot \delta + \alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot \delta + \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \\ &= \omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot \gamma + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n. \end{aligned}$$

Se γ è limite, notiamo che per ogni $\delta < \gamma$ abbiamo $\alpha \cdot \delta < \omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot S(\delta) \leq \alpha \cdot S(\delta)$ (Esercizio 4.43). Allora $\alpha \cdot \gamma = \sup_{\delta<\gamma}(\alpha \cdot \delta) \leq \sup_{\delta<\gamma}(\omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot S(\delta)) = \sup_{\delta<\gamma}(\omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot \delta) = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 \cdot \gamma$. □

Esercizi

Esercizio 4.24. Per ogni $\beta \in \mathbf{On}$, la funzione $\alpha \mapsto \alpha + \beta$ è debolmente crescente.

Esercizio 4.25. Fissato $\alpha \in \mathbf{On}$, trovare il minimo punto fisso della funzione $\alpha \mapsto \alpha + \beta$.

Esercizio 4.26. Verificare che nella definizione di somma (2) e (3) possono essere rimpiazzati da

(2') per $\beta \in \mathbf{On}$ e $\beta \neq \emptyset$, $\alpha + \beta := \sup\{S(\alpha + \gamma) \,:\, \gamma < \beta\}$.

Esercizio 4.27. Dimostrare che $1 + \omega = \omega$ e che $\omega + 1 \neq \omega$.

Esercizio 4.28. Siano $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ bene ordinati con $A \cap B = \emptyset$. Sia $C := A \cup B$. Definiamo $<_C$ su C come:

(1) per ogni $x \in A$, $y \in B$, $x <_C y$;
(2) per ogni $x, y \in A$, $x <_C y$ se e solo se $x <_A y$;

(3) per ogni $x, y \in B$, $x <_C y$ se e solo se $x <_B y$.

Verificare che se $(A, <_A)$ è isomorfo a $(\alpha, \in)$ e $(B, <_B)$ è isomorfo a $(\beta, \in)$, allora $(C, <_C)$ è isomorfo a $(\alpha + \beta, \in)$.

Esercizio 4.29. Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$, la funzione $\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ è strettamente crescente.

Esercizio 4.30. Per ogni $\beta \in \mathbf{On}$, la funzione $\alpha \mapsto \alpha \cdot \beta$ è debolmente crescente.

Esercizio 4.31. Fissato $\alpha \in \mathbf{On}$, trovare il minimo punto fisso della funzione $\alpha \mapsto \alpha \cdot \beta$.

Esercizio 4.32. Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Esercizio 4.33. Verificare che nella definizione di prodotto (1), (2) e (3) possono essere rimpiazzati da

(2') per $\beta \in \mathbf{On}$, $\alpha \cdot \beta := \sup\{\alpha \cdot \gamma + \gamma : \gamma < \beta\}$.

Esercizio 4.34. Dimostrare che $2 \cdot \omega = \omega$ e $\omega \cdot 2 \neq \omega$.

Esercizio 4.35. Siano $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ bene ordinati. Sia $C := A \times B$. Definiamo $<_C$ su C come:

(1) $(x, y) <_C (z, w)$ se e solo se $y <_B w$, oppure $y = w$ e $x <_A z$.

Verificare che se $(A, <_A)$ è isomorfo a $(\alpha, \in)$ e $(B, <_B)$ è isomorfo a $(\beta, \in)$, allora $(C, <_C)$ è isomorfo a $(\alpha \cdot \beta, \in)$.

Esercizio 4.36. Per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$ diverso da $\{\emptyset\}$, la funzione $\beta \mapsto \alpha^\beta$ è strettamente crescente.

Esercizio 4.37. Per ogni $\beta \in \mathbf{On}$, la funzione $\alpha \mapsto \alpha^\beta$ (per $\alpha \neq \emptyset$) è debolmente crescente.

Esercizio 4.38. Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$ con $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

Esercizio 4.39. Verificare che nella definizione di esponenziale (2) e (3) possono essere rimpiazzati da

(2') per $\beta \in \mathbf{On}$, $\alpha^\beta := \sup\{\alpha^\gamma \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$.

Esercizio 4.40. Dimostrare che $2^\omega = \omega$ e $\omega^2 \neq \omega$.

Esercizio 4.41. Per ogni $\alpha \geq \beta$ ordinali, esistono unici $\gamma, \delta \in \mathbf{On}$ tali che $\beta \cdot \gamma + \delta = \alpha$ e $\delta < \gamma$.

Esercizio 4.42. Per ogni $\alpha \geq \beta$ ordinali, esistono unici $\gamma, \delta, \eta \in \mathbf{On}$ tali che $\beta^\gamma \cdot \eta + \delta = \alpha$, con $\eta < \beta$ e $\delta < \beta^\gamma$.

Esercizio 4.43. Per ogni $\beta, \gamma, k \in \mathbf{On}$, se $\gamma < \beta$ e $k < \omega$, allora $\omega^\beta > \omega^\gamma \cdot k$.

Esercizio 4.44. Verificare che la somma naturale coincide con la somma ordinaria sui numeri naturali.

Esercizio 4.45. Verificare che il prodotto naturale coincide con il prodotto ordinario sui numeri naturali.

Esercizio 4.46. Scrivere in forma normale di Cantor i seguenti ordinali:

(1) $\omega^3 \cdot (\omega^2 + 4)$;
(2) $\omega^3 + 5 \cdot \omega^6$;
(3) $(\omega^2 + \omega \cdot 3) \cdot \omega^2 \cdot 7$;
(4) $(\omega^3 + \omega \cdot 3) \cdot (\omega^5 \cdot 2 + 5)$;
(5) $(\omega + \varepsilon_0 + \omega^3) \cdot (\omega + 1)$.

5. Somma e prodotto naturali

Definizione 5.1. Siano $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ e $\gamma = \omega^{\beta_{n+1}} \cdot k_{n+1} + \cdots + \omega^{\delta_{n+m}} \cdot k_{n+m}$ in forma normale di Cantor.

La **somma naturale** $\alpha \oplus \beta$ è

$$\omega^{\beta_{\sigma(1)}} \cdot k_{\sigma(1)} + \cdots + \omega^{\beta_{\sigma(n+m)}} \cdot k_{\sigma(n+m)}$$

dove σ è una permutazione di $\{1, \ldots, n+m\}$ tale che $\beta_{\sigma(1)} \geq \beta_{\sigma(2)} \geq \cdots \geq \beta_{\sigma(n+m)}$.

Fatto 5.2. *La somma naturale è associativa e commutativa.*

Osservazione 5.3. Se $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ è in forma normale di Cantor, allora

$$\omega^{\beta_1} \cdot k_1 \oplus \cdots \oplus \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \alpha.$$

Allora la somma naturale $\alpha \oplus \gamma$ si calcola semplicemente rimpiazzando $+$ con $\oplus$ nelle forme normali di α e γ e sfruttando il fatto che $\oplus$ è commutativa.

Esempio 5.4. $(\omega^3 + \omega^2) \oplus (\omega^4 + \omega^2) = \omega^3 \oplus \omega^2 \oplus \omega^4 \oplus \omega^2 = \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 \cdot 2$.

Definizione 5.5. Siano $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ e $\gamma = \omega^{\delta_1} \cdot j_n + \cdots + \omega^{\delta_m} \cdot j_n$ in forma normale di Cantor.

Il **prodotto naturale** $\alpha \odot \beta$ è

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{l=1}^{m} \omega^{\beta_i \oplus \delta_l} \cdot k_i \cdot j_l.$$

Fatto 5.6. *Il prodotto naturale è commutativo, associativo e distributivo sulla somma naturale. Inoltre,* $\omega^\alpha \odot \omega^\beta = \omega^{\alpha \oplus \beta}$.

Osservazione 5.7. Dati due ordinali in forma normale, il prodotto naturale si calcola rimpiazzando $+$ con $\oplus$, usando la distributività di $\odot$, e usando la regola $\omega^\alpha \odot \omega^\beta = \omega^{\alpha \oplus \beta}$.

Esempio 5.8. $(\omega^3 + \omega^2) \odot (\omega^4 + 5) = \omega^3 \odot \omega^4 \oplus \omega^3 \odot 5 \oplus \omega^2 \odot \omega^4 \oplus \omega^2 \odot 5 = \omega^7 + \omega^6 + \omega^3 \cdot 5 + \omega^2 \cdot 5$.

Fatto 5.9. *Siano* $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ *due buoni ordini con* $A \cap B = \emptyset$ *isomorfi rispettivamente agli ordinali* $(\alpha, \in)$ *e* $(\beta, \in)$. *Sia* C *la collezione dei buoni ordini su* $A \cup B$ *che estendono* $<_A$ *e* $<_B$, *e sia* C' *la collezioni degli ordinali corrispondenti. Allora* $\alpha \oplus \beta = \sup(C)$.

Dati due ordini $(A, <_A)$, $(B, <_B)$, chiamiamo $<_{A \times B}$ l'ordine parziale su $A \times B$ definito da «$(a, b) <_{A \times B} (a', b')$ se e solo se $a <_A a'$ e $b \leq_B b'$ o $a \leq_A a'$ e $b <_B b'$».

Fatto 5.10. *Siano* $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ *due buoni ordini isomorfi rispettivamente agli ordinali* $(\alpha, \in)$ *e* $(\beta, \in)$. *Sia* C *la collezione dei buoni ordini su* $A \times B$ *che estendono* $<_{A \times B}$, *e sia* C' *la collezioni degli ordinali corrispondenti. Allora* $\alpha \odot \beta = \sup(C)$.

Esercizi

Esercizio 5.11. Scrivere in forma normale di Cantor i seguenti ordinali:

(1) $\omega^3 \odot (\omega^2 + 4)$;
(2) $\omega^3 \oplus 5 \cdot \omega^6$;
(3) $(\omega^2 + \omega \cdot 3) \odot \omega^2 \odot 7$;
(4) $(\omega^3 + \omega \cdot 3) \odot (\omega^5 \cdot 2 + 5)$;
(5) $(\omega \oplus \varepsilon_0 \oplus \omega^3) \cdot (\omega \oplus 1)$.